

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ 2
Інтегральне числення, функціональні ряди,
диференціальні рівняння
ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 124 «Системний аналіз»,*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Математичний аналіз 2:Інтегральне числення, функціональні ряди, диференціальні рівняння. Збірник задач для розрахункових робіт [Електронний ресурс] : навчальний. посібник для студентів. спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Г.Бондаренко, А.Ю.Мальцев, Г.Б.Подколзін.— Електронні текстові дані (1 файл: 3,52 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 56 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9 від 30.04.2020р.)
за поданням Вченої ради ІПСА (протокол №2 від 24.02. 2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ 2
Інтегральне числення, функціональні ряди,
диференціальні рівняння
ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ

Укладачі:

.
Бондаренко Віктор Григорович, доктор фіз.-мат. наук, проф.
Мальцев А.Ю., кандидат фіз.-мат. наук, доц.
Подколзін Гліб Борисович, кандидат фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний
редактор

Каніовська І.Ю., кандидат фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент:

Клесов О.І. доктор фіз.-мат. наук, проф.

Посібник містить задачі для самостійної роботи студентів за наступних розділах дисципліни «математичний аналіз» – первісна та визначений інтеграл, функціональні ряди, диференціальні рівняння. Кожен розділ містить методичні вказівки із прикладами розв’язання.

Для студентів математичних і технічних спеціальностей університетів

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 4 ПЕРВІСНА ТА ІНТЕГРАЛ	5
4.1. Теоретичні відомості та приклади розв’язування задач	5
4.3 Теоретичні питання для самоконтролю	28
РОЗДІЛ 5 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	29
5.1. Теоретичні відомості та приклади розв’язування задач	29
5.2. Завдання розрахункової роботи	31
5.3 Теоретичні питання для самоконтролю	39
РОЗДІЛ 6 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	39
6.1. Теоретичні відомості та приклади розв’язування задач	39
6.2. Завдання розрахункової роботи	42
6.3 Теоретичні питання для самоконтролю	55
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.	56

ВСТУП

Дисципліни «Математичний аналіз» є базовою для таких дисциплін як: ЗО 4 «Фізика», ЗО 5 «Диференціальні рівняння», ЗО 6 «Теорія ймовірностей», ЗО 9 «Чисельні методи», ЗО 7 «Функціональний аналіз», ПВ 1 «Гармонічний аналіз та операційне числення», ПО 5 «Математична статистика», ПО 7 «Рівняння математичної фізики», ПО 10 «Теорія випадкових процесів», ЗО 13 «Теорія прийняття рішень», ПВ 2 «Теорія стійкості та варіаційне числення», ПО 13 «Стационарні випадкові процеси», ЗО 11 «Теорія керування», ЗО 12 «Основи системного аналізу», ЗО 10 «Методи оптимізації та дослідження операцій», ПО 16 «Системний аналіз стохастичних розподілених процесів», ПО 8 «Аналіз часових рядів», ПВ 3 «Основи фінансової математики».

Для засвоєння та закріплення знань та умінь програма передбачає виконання завдань розрахункових робіт за обсягами годин самостійної роботи студентів. Пропонований збірник містить такі завдання для студентів Інституту прикладного системного аналізу спеціальності 124 «Системний аналіз». Зміст збірника охоплює теми, що вивчаються в другому семестрі: первісна та інтеграл, функціональні ряди, диференціальні рівняння. Збірник складається з трьох розділів: завданням розрахункових робіт передують теоретичні відомості та приклади розв'язування задач. Кожне завдання містить 31 варіант, що забезпечує індивідуальне виконання студентами розрахункової роботи. При складанні даного посібника автори використовували джерела, наведені в списку літератури—зокрема, Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике та Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з дисципліни «Математичний аналіз». НТУУ КПІ, 2015 р.

Розділ 4 Первісна та інтеграл

4.1. Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Основні теоретичні питання, що необхідні для розв'язання завдань РР. Поняття первісної функції; властивості первісних. Таблиця невизначених інтегралів. Заміна змінної та інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Розклад дробово - раціональної функції на прості дроби. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції та деяких ірраціональних виразів. Поняття визначеного інтеграла та його геометричний зміст. Основні властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє. Формула Ньютона-Лейбниця. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Обчислення площі фігур на площині. Обчислення довжини кривої та об'єму тіла обертання.

Означення: **Первісною функцією** $f(x)$, заданої на множині A є функція $F(x)$, яка задана на множині A , та пов'язана з співвідношенням $F'(x) = f(x)$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається множина всіх первісних та позначається $\int f(x)dx$. Тоді із означення та властивостей первісних випливає, що $\int f(x)dx = F(x) + C$, де C - довільна константа.

Таблиця первісних від елементарних функцій тотожна таблиці похідних. Для обчислення невизначених інтегралів застосовуються методи заміни змінної та інтегрування частинами. Для деяких класів підінтегральних функцій використовуються спеціальні методи.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ будується як границя інтегральних сум:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(y_k) |\Delta_k|$$

де $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ — розбиття відрізка $[a, b]$, тобто $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$, та $\Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset$

$\forall j \neq k \quad j, k = 1, \dots, n, |\Delta_k|$ — довжина відрізка $\Delta_k, |\Delta_k| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Обчислити визначений інтеграл можна за формулою Ньютона — Лейбниця, що встановлює зв'язок між визначеним інтегралом та первісною:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Приклади розв'язання задач.

1. Обчислити невизначений інтеграл $I = \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

Розв'язання. $I = \left[\sqrt{x} = t \right] = 2 \int \frac{1-t}{t(1+t^2)} t dt = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = 2 \arctg \sqrt{x} - \ln |1+x| + C$.

2. Обчислити невизначений інтеграл $I = \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x-1)} dx$.

Розв'язання. Розкладаємо підінтегральну функцію на прості дроби, але спочатку

ділимо чисельник на знаменник з остачею: $\frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x-1)} = 2 + \frac{3x^2 - x - 12}{x(x-3)(x-1)} =$

$2 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{D}{x-1}$. Звідси: $A = \frac{3x^2 - x - 12}{(x-3)(x-1)} \Big|_{x=0} = 4; \quad B = \frac{3x^2 - x - 12}{x(x-1)} \Big|_{x=3} = 1;$

$D = \frac{3x^2 - x - 12}{x(x-3)} \Big|_{x=1} = -2$.

Відповідь: $I = 2x + 4 \ln |x| + \ln |x-3| - 2 \ln |x-1| + C$.

3. Обчислити визначений інтеграл $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos^2 x} dx$.

Розв'язання. Заміною $\operatorname{tg} x = t$ приходимо до рівності:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{4 + 3 \frac{1}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{7 + 4t^2} =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{3}} dt - \frac{7}{4} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{7 + 4t^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{8} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t}{\sqrt{7}} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{8} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right).$$

4. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями, що визначені рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 3).$$

5. Обчислити довжину кривої, що визначена рівнянням в полярних координатах:

$$\rho = 1 + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Розв'язання. Фігура обмежена аркою циклоїди та прямою $y = 3$ (зробіть малюнок!) і являє собою криволінійну трапецію, верхній бік якої – функція $y = f(x)$, $x \in [x_1; x_2]$, параметричне завдання якої нам відоме. При цьому $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, значення t_1 і t_2 знаходимо з умови: $y(t_k) = 3$ ($k = 1; 2$). Тож $t_1 = \frac{2\pi}{3}$; $t_2 = \frac{4\pi}{3}$

і одержимо:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - 3) dx = \int_{t_1}^{t_2} 2(1 - \cos t) d(2(t - \sin t)) - 3(x_2 - x_1) = 4 \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1 - \cos t)^2 dt -$$

$$- 3 \left(x \left(\frac{4\pi}{3} \right) - x \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 4 \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt - 3 \left(2 \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) =$$

$$= 4 \left(\pi + 2\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3} \right) - 4\pi - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Розв'язання. $L = \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4 \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 4.$

6. Обчислити об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі ОУ фігури, що обмежена графіками функцій: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $x = 0$.

Розв'язання. Обертається криволінійна трапеція. Вона обмежена кривими:

$x = \sin y$; $x = \cos y$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ (зробіть відповідний малюнок!). При цьому

$$\sin y \leq x \leq \cos y. \text{ Тому } V = \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 y - \sin^2 y) dy = \pi \left(\frac{1}{2} \sin 2y \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}.$$

4.2. Завдання розрахункової роботи

Завдання 1 Обчислити первісну

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

2. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx.$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

4. $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$

5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$

6. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

7. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$

8. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$

9. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$

10. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3} dx.$

11. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$

12. $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$

13. $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$

14. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$

$$15. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$16. \int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$17. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^3 + 3x + 1)^5}.$$

$$18. \int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx.$$

$$19. \int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx.$$

$$20. \int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$21. \int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$22. \int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$23. \int \frac{1 / (2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x+x})^2} dx.$$

$$24. \int \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

$$25. \int \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$26. \int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$27. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx.$$

$$28. \int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$29. \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

$$30. \int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$31. \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

Завдання 2 Обчислити інтеграл

$$1. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$2. \int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

$$3. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$4. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{x^2+4}.$$

$$5. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx.$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx.$$

$$7. \int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx.$$

$$8. \int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x}) + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

$$10. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$11. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx.$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx.$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx.$$

$$15. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$16. \int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

$$17. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$20. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$21. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

$$22. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$23. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$24. \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$$

$$25. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$26. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$27. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$29. \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$30. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

$$31. \int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Завдання 3 Обчислити первісну

$$1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx.$$

$$3. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$6. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

$$7. \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx.$$

$$8. \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2 + 3)} dx.$$

$$9. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$10. \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$$

$$11. \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx.$$

$$12. \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx.$$

$$14. \int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)} dx.$$

$$15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx.$$

$$16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$19. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx.$$

$$20. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx.$$

$$21. \int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx.$$

$$22. \int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} dx.$$

$$23. \int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$24. \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$25. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$26. \int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$27. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$28. \int \frac{x + 4}{(x^2+x+2)(x^2+2)} dx.$$

$$29. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$30. \int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)} dx.$$

$$31. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

Завдання 4. Обчислити інтеграл.

$$1. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$2. \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$3. \int_0^{\arccos(4/\sqrt{17})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$$

$$4. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$5. \int_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$6. \int_0^{\arccos \sqrt{2/3}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx.$$

$$7. \int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$$

$$8. \int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$$

$$9. \int_{-\operatorname{arctg}(1/3)}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx.$$

$$10. \int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$11. \int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4} dx.$$

$$12. \int_0^{\pi/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$$

$$13. \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x} dx.$$

$$14. \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$$

$$15. \int_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$16. \int_0^{\arcsin \sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}.$$

17. $\int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$
18. $\int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{2 \operatorname{tg} x + 5}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x} dx.$
19. $\int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx.$
20. $\int_0^{\pi/4} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$
21. $\int_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx.$
22. $\int_0^{\arcsin \sqrt{7/8}} \frac{6 \sin^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$
23. $\int_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^0 \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$
24. $\int_0^{\arcsin 3\sqrt{10}} \frac{2 \operatorname{tg} x - 5}{(4 \cos x - \sin x)^2} dx.$
25. $\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$
26. $\int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$
27. $\int_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx.$
28. $\int_{\pi/4}^{\arcsin \sqrt{2/3}} \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x + 8 \sin 2x - 7}.$
29. $\int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12 dx}{(6 + 5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$
30. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$
31. $\int_0^{\arccos(1/\sqrt{6})} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}.$

Завдання 5. Обчислити інтеграл

1. $\int_0^{16} \sqrt{256 - x^2} dx.$
2. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$

$$3. \int_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$4. \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}.$$

$$5. \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$6. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$10. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$11. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$12. \int_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$13. \int_0^4 x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$14. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$15. \int_0^5 x^2 \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$16. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$17. \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$18. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$19. \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}.$$

$$20. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$21. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$22. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$23. \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

$$24. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$25. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$26. \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx.$$

$$27. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

$$28. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{3/2}}.$$

$$29. \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$31. \int_0^{3/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Завдання 6 . Дослідити на збіжність ряд, застосувавши інтегральну ознаку.

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}.$$

$$4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5}+2)}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1) \ln^2(n\sqrt{3}+1)}.$$

$$8. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}.$$

$$11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}.$$

$$13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}.$$

$$14. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n}.$$

$$15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}.$$

$$16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}.$$

$$17. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n-1)}.$$

$$18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}.$$

$$19. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}.$$

$$20. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}.$$

$$21. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}.$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}.$$

$$23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}.$$

$$24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}.$$

$$25. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}.$$

$$26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln n}.$$

$$27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}.$$

$$28. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}.$$

$$29. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}.$$

$$30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}.$$

$$31. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}.$$

Завдання 7. Обчислити площу, обмежену кривими.

$$1. \begin{cases} y = (x-2)^3, \\ y = 4x-8. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y = x\sqrt{9-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 3). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = 4-x^2, \\ y = x^2-2x. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y = \sin x \cos^2 x, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, & y = 0, \\ x = 0, & x = 1. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y = x^2\sqrt{4-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2). \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y = \cos x \sin^2 x, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y = \sqrt{e^x-1}, & y = 0, \\ x = \ln 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, & y = 0, \\ x = 1, & x = e^3. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y = \arccos x, & y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} y = (x+1)^2, \\ y^2 = x+1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} y = 2x-x^2+3, \\ y = x^2-4x+3. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} y = x\sqrt{36-x^2}, & y = 0, \\ (0 \leq x \leq 6). \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \arccos y, & x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$15. \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = 0, \\ x = \sqrt{3}.$$

$$17. \quad x = \sqrt{e^y - 1}, \quad x = 0, \\ y = \ln 2.$$

$$19. \quad y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad y = 0, \\ x = 1.$$

$$21. \quad x = (y - 2)^3, \\ x = 4y - 8.$$

$$23. \quad y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = 0, \\ x = 1.$$

$$25. \quad x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}, \quad x = 0, \\ y = 1, \quad y = e^3.$$

$$27. \quad y = x^2 \sqrt{16 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq 4).$$

$$29. \quad y = (x - 1)^2, \\ y^2 = x - 1.$$

$$31. \quad x = 4 - (y - 1)^2, \\ x = y^2 - 4y + 3.$$

$$16. \quad y = x^2 \sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}).$$

$$18. \quad y = x\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq 2).$$

$$20. \quad y = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad y = 0, \\ x = \pi/2, \quad x = -\pi/2.$$

$$22. \quad y = \cos^5 x \sin 2x, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2).$$

$$24. \quad x = 4 - y^2, \\ x = y^2 - 2y.$$

$$26. \quad y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, \quad y = 0, \\ x = 2, \quad x = 1.$$

$$28. \quad x = \sqrt{4 - y^2}, \quad x = 0, \\ y = 0, \quad y = 1.$$

$$30. \quad y = x^2 \cos x, \quad y = 0, \\ (0 \leq x \leq \pi/2).$$

Завдання 8. Обчислити площу, що обмежена кривими.

$$1. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 4). \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \quad (x \geq 2). \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}). \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \\ y = 3 \quad (0 < x < 6\pi, \quad y \geq 3). \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \\ y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 9). \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4 \quad (x \geq 4). \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 6). \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ x = 2\sqrt{3} \quad (x \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1 \quad (0 < x < 2\pi, \quad y \geq 1). \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ y = 2 \quad (y \geq 2). \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 15). \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \\ y = 4 \quad (y \geq 4). \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \\ x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, \quad y \geq 12). \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \\ y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, \quad y \geq 2).$$

$$28. \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 2 \quad (x \geq 2).$$

$$29. \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \\ y = 5 \quad (y \geq 5).$$

$$30. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, \quad y \geq 6).$$

$$31. \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \\ x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}).$$

Завдання 9. Обчислити площу, обмежену лініями, що задані в полярних координатах.

$$1. \quad r = 4 \cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$2. \quad r = \cos 2\varphi.$$

$$3. \quad r = \sqrt{3} \cos \varphi, \quad r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$4. \quad r = 4 \sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$5. \quad r = 2 \cos \varphi, \quad r = 2\sqrt{3} \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$6. \quad r = \sin 3\varphi.$$

$$7. \quad r = 6 \sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$8. \quad r = \cos 3\varphi.$$

$$r = \cos \varphi,$$

$$r = \sin \varphi,$$

$$9. \quad r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4), \\ (-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

$$10. \quad r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \\ (0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$$

$$11. r = 6\cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$12. r = 1/2 + \sin \varphi.$$

$$13. \begin{cases} r = \cos \varphi, & r = \sin \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \pi/2). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \\ 14. \quad r &= \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4), \\ &(\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4). \end{aligned}$$

$$15. r = \cos \varphi, \quad r = 2\cos \varphi.$$

$$16. r = \sin \varphi, \quad r = 2\sin \varphi.$$

$$17. r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$$

$$18. r = 1/2 + \cos \varphi.$$

$$19. r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$$

$$20. r = (5/2)\sin \varphi, \quad r = (3/2)\sin \varphi.$$

$$21. r = (3/2)\cos \varphi, \quad r = (5/2)\cos \varphi.$$

$$22. r = 4\cos 4\varphi.$$

$$23. r = \sin 6\varphi.$$

$$24. r = 2\cos \varphi, \quad r = 3\cos \varphi.$$

$$25. r = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

$$26. r = 2\sin 4\varphi.$$

$$27. r = 2\cos 6\varphi.$$

$$28. r = \cos \varphi - \sin \varphi.$$

$$29. r = 3\sin \varphi, \quad r = 5\sin \varphi.$$

$$30. r = 2\sin \varphi, \quad r = 4\sin \varphi.$$

$$31. r = 6\sin \varphi, \quad r = 4\sin \varphi.$$

Завдання 10. Обчислити довжину дуги кривої, що задана параметричними рівняннями.

$$1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \\ \pi \leq t \leq 2\pi.$$

$$9. \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$11. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$13. \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$15. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$8. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$10. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$12. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi.$$

$$14. \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$16. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$17. \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/6.$$

$$19. \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$$

$$21. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$23. \begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

$$25. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$27. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$29. \begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/4.$$

$$18. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$20. \begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$

$$22. \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$24. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3\pi/2.$$

$$26. \begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$28. \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3\pi.$$

$$30. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

$$31. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi.$$

Завдання 11. Обчислити об'єм, обмежений поверхнями.

$$1. \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0). \quad 2. z = x^2 + 4y^2, \quad z = 2.$$

$$3. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3. \quad 4. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$$

$$5. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z = 1, \quad z = 0.$$

$$6. x^2 + y^2 = 9, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

$$7. z = x^2 + 9y^2, \quad z = 3.$$

$$8. \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$$

$$9. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, \quad z = 16.$$

$$10. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 2, \quad z = 0.$$

$$11. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0). \quad 12. z = 2x^2 + 8y^2, \quad z = 4.$$

$$13. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

$$14. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, \quad z = 12.$$

$$15. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad z = 3, \quad z = 0.$$

$$16. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad z = y\sqrt{3}, \quad z = 0 \quad (y \geq 0).$$

17. $z = x^2 + 5y^2$, $z = 5$. 18. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 4$.
19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1$, $z = 20$. 20. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1$, $z = 4$, $z = 0$.
21. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1$, $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$, $z = 0$ ($y \geq 0$). 22. $z = 4x^2 + 9y^2$, $z = 6$.
23. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3$. 24. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1$, $z = 20$.
25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1$, $z = 5$, $z = 0$.
26. $\frac{x^2}{27} + y^2 = 1$, $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$, $z = 0$ ($y \geq 0$).
27. $z = 2x^2 + 18y^2$, $z = 6$. 28. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$.
29. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1$, $z = 16$. 30. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1$, $z = 6$, $z = 0$.
31. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1$, $z = 7$, $z = 0$.

Завдання 12. Обчислити об'єм тіла, що утворене обертанням заданих кривих: у варіантах 1—16 вісь обертання OX , у варіантах 17—31 вісь обертання OY .

1. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$. 2. $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.
3. $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
4. $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \geq 0$.

5. $y = \sin^2 x$, $x = \pi/2$, $y = 0$. 6. $x = \sqrt[3]{y-2}$, $x = 1$, $y = 1$.
7. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$. 8. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$.
9. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$. 10. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
11. $y = x^2$, $y^2 - x = 0$. 12. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.
13. $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y-1}$, $x = 1$. 14. $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.
15. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. 16. $y = \sin(\pi x/2)$, $y = x^2$.
17. $y = \arccos(x/3)$, $y = \arccos x$, $y = 0$.
18. $y = \arcsin(x/5)$, $y = \arcsin x$, $y = \pi/2$.
19. $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.
20. $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$.
21. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0,5$. 22. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$.
23. $y = (x-1)^2$, $y = 1$. 24. $y^2 = x - 2$, $y = 0$, $y = x^3$, $y = 1$.
25. $y = x^3$, $y = x^2$. 26. $y = \arccos(x/5)$, $y = \arccos(x/3)$, $y = 0$.
27. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.
28. $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$. 29. $y = x^3$, $y = x$.
30. $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $x = 0$.
- 31.

4.3 Теоретичні питання для самоконтролю

1. Визначення первісної функції та її властивості.
2. Таблиця первісних (невизначених інтегралів).

3. Методи обчислення первісної: заміна змінної та інтегрування частинами.
4. Інтегрування раціональних та деяких ірраціональних функцій.
5. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.
6. Означення визначеного інтеграла, геометричний зміст.
7. Основні властивості визначеного інтеграла.
8. Теорема про середнє значення.
9. Диференціювання визначеного інтеграла як функції границь інтегрування.
10. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
11. Невласні інтеграли. Інтегральна ознака збіжності числового ряду.
12. Обчислення площі плоскої області.
13. Визначення довжини кривої та її обчислення.
14. Обчислення об'єму тіла із заданою площею перерізу.

Розділ 5 Функціональні ряди

5.1. Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Основні теоретичні питання, що необхідні для розв'язання завдань РР. Поняття рівномірної збіжності функціонального ряду. Ознака Вейєрштрасса. Теорема про неперервність суми функціонального ряду. Теореми про почленне інтегрування та почленне диференціювання функціонального ряду. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневому ряду. Теорема про рівномірну збіжність степеневому ряду. Розвинення функції в степеневий ряд. Ряд Тейлора. Розвинення по степеням функцій e^x ; $\sin x$; $\cos x$; $\ln(1+x)$; $(1+x)^a$.

Послідовність функцій f_1, \dots, f_n, \dots збігається до функції f поточково на множині Δ , якщо для кожного $x \in \Delta$ та для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon, x)$, що має місце співвідношення: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow n > N(\varepsilon, x)$. Якщо цей номер можна вибрати незалежним від точки x , послідовність функцій f_n збігається до функції f рівномірно на множині Δ .

Нехай задана послідовність функцій $u_n(x)$, $x \in \Delta$. Утворимо нову послідовність:

$$S_1(x) = u_1(x), S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \dots, S_n(x) = S_{n-1}(x) + u_n(x), \dots$$

Якщо ця послідовність збігається (поточково або рівномірно на Δ), то її границя $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ називається сумою функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Термінологія: функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається (поточково або рівномірно на Δ) відповідно до типу збіжності послідовності $S_n(x)$. Якщо ця послідовність не має границі, ряд розбігається.

Приклади розв'язання задач.

1. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln(1+x^2)}$.

Розв'язання. Умова $\ln(1+x^2) > 1$ гарантує абсолютну збіжність ряду. Тож при $x^2 > e-1$ ряд збігається абсолютно. Якщо $0 < \ln(1+x^2) \leq 1$, тобто $x^2 \in (0; e-1]$, то ряд збігається умовно. В разі $x=0$ не виконується необхідна умова і ряд розбіжний.

2. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}$.

Розв'язання. Це степеневий ряд і насамперед треба знайти його радіус збіжності. Формула Коші-Адамара в даному разі не є зручною. Тому просто використаємо ознаку Даламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4) \ln(n+4)}{(n+5) \ln(n+5)} |x-5| = |x-5|$. Тут

скористались границею: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+4)}{\ln(n+5)} = 1$, яку можна одержати, наприклад,

скориставшись правилом Лопітала: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+4)}{\ln(x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x+5} = 1$. Тож для $|x-5| < 1$,

тобто: $x \in (4;6)$ ряд збігається абсолютно. Для $|x-5| > 1$ ряд є розбіжним. Якщо

$x=6$, то одержимо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$, що є розбіжним за інтегральною

ознакою. Для $x=4$ ряд – лейбницевського типу, тож він збігається умовно.

3. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ на відрізку $[-2;0]$.

Розв'язання. Скористуємось ознакою Вейерштрасса і знайдемо мажорантний числовий ряд. $|(x+1)^n| \leq 1$ на $[-2;0]$. Тому для $\forall n \geq 1; \forall x \in [-2;0]$ маємо:

$\left| \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ збігається за інтегральною

ознакою, оскільки є збіжним невласний інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

4. Розвинути функцію $y = \ln(1-7x+12x^2)$ в ряд Тейлора за степенями x .

Розв'язання. $y = \ln((1-3x)(1-4x)) = \ln(1-3x) + \ln(1-4x) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^n (-1)^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4x)^n (-1)^{n-1}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{n} x^n.$$

5.2. Завдання розрахункової роботи

Завдання 1 Знайти область збіжності ряду

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \sqrt{x-2} \cdot e^{-n^2/(x-1)^3}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+1/n)}{\sqrt{x-e}}.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \cdot 5^{-n/(x+1)^2}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sqrt{x-1} \cdot e^{-n/x}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(1-x\sqrt{n})^2}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 3^{n/(x-1)}.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n^3 \cdot \sin(x^2+1)/n}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x-1)}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg} \frac{x}{7^{nx}(x-1)}.$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+2)}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n \cdot 3^{-n/x^2}.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+e)}.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \cdot \sin(x^2+1)/n}.$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n/\cos x}.$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(1+1/n) + \ln \ln x)^n}{\sqrt{x - e^{1/e}}}.$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\ln|x|}}.$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+1/e)}.$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{x \ln n}{x - n}.$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n \sin x}}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5^{-n^2 \cdot \arctan(1/(n|x|))}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{-n^2 \cdot \ln(1+x/n)}.$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/(x-1))}{e^{n\sqrt{x}}}.$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{x}} \arcsin \frac{x}{3^{nx}}.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2x} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2^{nx}}.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{-n^2 \cdot (\ln n / (x^2+1))}.$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{n/\ln x}.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n x}.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5^{n(\ln n / x^2)}.$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^4 \left(\sin 1 / n^2 x^2 \right)}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot 4^{-n^2/x}.$$

Завдання 2 Знайти область збіжності ряду

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n (x-1)^{2n}}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!} (x+5)^{2n+1}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

$$21. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^{2n}}.$$

$$22. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{x^n}.$$

$$25. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{(2n+9)^5 (x+2)^{2n}}.$$

$$28. \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n (x+4)^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}.$$

Завдання 3 Довести рівномірну збіжність ряду на вказаному інтервалі, використовуючи умову Вейєрштрасса

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad [0, 2].$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}, \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad [-2, 2].$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}, \quad [-1, 6].$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, \quad [2, 4].$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi-x)\cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}, \quad [0, \pi].$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}, \quad [-1, 3].$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad [-5, -1].$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}, \quad [1, 3].$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad [-3, 3].$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n \ln n}, \quad [-2, 2].$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}, \quad [-7, -3].$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, \quad [-3, -1].$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^4 x^{2n}}{2n+1}, \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}, \quad \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2}, \quad [-6, -4].$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}, \quad [1, 3].$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}, \quad [-3, 0].$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad [-1, 1].$$

$$24. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}, \quad [-6, -4].$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^{n^2}}, \quad [-2, 2].$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{2^n} \right) (x-2)^n, \quad [1, 3].$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}, \quad [0, 2].$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}, \quad [-1, 0].$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(x+2)^n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}, \quad [-3, -1].$$

$$30. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}, \quad [2, 4].$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}, \quad [-2, 0].$$

Завдання 4 Знайти суму ряду

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}.$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) x^{n+2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n}.$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n-1)}.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+2}}{16^n (2n+1)}.$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) x^n.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n} \right] x^{2n}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] x^{n-1}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n.$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \left[2^n + \frac{(-1)^n}{n} \right] x^n.$$

$$25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}.$$

$$26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{n(n+1)}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}.$$

$$29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{n+1}}.$$

$$30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

$$31. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)(2n+3)}.$$

Завдання 5 Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ та визначити інтервал збіжності.

$$1. \frac{9}{20 - x - x^2}.$$

$$2. \frac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}.$$

$$3. \ln(1-x-6x^2).$$

$$5. \frac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2.$$

$$7. \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}.$$

$$9. (x-1)\sin 5x.$$

$$11. \frac{6}{8+2x-x^2}.$$

$$13. \ln(1-x-12x^2).$$

$$15. \frac{\arcsin x}{x} - 1.$$

$$17. x^2 \sqrt{4-3x}.$$

$$19. 2x \sin^2(x/2) - x.$$

$$21. \frac{5}{6+x-x^2}.$$

$$23. \ln(1+x-12x^2).$$

$$25. \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

$$27. \sqrt[4]{16-5x}.$$

$$29. (2-e^x)^2.$$

$$31. \frac{3}{2-x-x^2}.$$

$$4. 2x \cos^2(x/2) - x.$$

$$6. \frac{7}{12+x-x^2}.$$

$$8. \ln(1+x-6x^2).$$

$$10. \frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^2}.$$

$$12. \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}.$$

$$14. (3+e^{-x})^2.$$

$$16. \frac{7}{12-x-x^2}.$$

$$18. \ln(1+2x-8x^2).$$

$$20. (x-1)\operatorname{sh} x.$$

$$22. x \sqrt[3]{27-2x}.$$

$$24. \frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x.$$

$$26. \frac{5}{6-x-x^2}.$$

$$28. \ln(1-x-20x^2).$$

$$30. (x-1)\operatorname{ch} x.$$

5.3 Теоретичні питання для самоконтролю

1. Означення рівномірної збіжності функціонального ряду.
2. Достатня умова неперервності суми функціонального ряду.
3. Почленне інтегрування та диференціювання функціонального ряду.
4. Теорема Абеля, інтервал збіжності степеневого ряду.
5. Властивості степеневих рядів: область рівномірної збіжності, почленне інтегрування та диференціювання
6. Ряд Тейлора, Умови розкладу функції в ряд Тейлора.
7. Розклад функцій $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 0$.

Розділ 6 Диференціальні рівняння

6.1. Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку. Формулювання теореми Коші-Пікара. Диференціальні рівняння першого порядку: з подільними змінними; однорідні, лінійні першого порядку, рівняння Бернуллі. Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші. Загальний та частковий розв'язки. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку. Лінійні однорідні диференціальні рівняння та властивості їх розв'язків. Фундаментальна система розв'язків. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння та структура його розв'язку. Характеристичний многочлен лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, пошук фундаментальної системи розв'язків. Розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методами підбору часткового розв'язку спеціального виду та методом Лагранжа варіації сталих.

Диференціальне рівняння визначається як рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

де F — задана скалярна функція $n + 2$ змінних, $y(x)$ — шукана функція, x — незалежна змінна. Найвищий порядок похідної, що входить до диференціального рівняння, називається порядком цього рівняння.

Задача Коші: знайти розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння n -го порядку, що задовольняє початкових умов $y(x_0) = a_1, y'(x_0) = a_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n$.

Лінійне диференціальне рівняння має вигляд

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x)$$

і називається однорідним, якщо $f(x) \equiv 0$. Якщо коефіцієнти a_k не залежать від x ,

отримуємо лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами.

1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0.$$

Розв'язання. Вихідне рівняння є рівнянням з подільними змінними. Його можна

записати у вигляді: $3 \frac{y dy}{\sqrt{2 + y^2}} = - \frac{dx}{x^2 + 1}$. Звідси: $\int \frac{3y dy}{\sqrt{2 + y^2}} = - \int \frac{dx}{x^2 + 1}$;

$$\frac{3}{2} \int \frac{d(2 + y^2)}{\sqrt{2 + y^2}} = - \arctg x; 3\sqrt{2 + y^2} + \arctg x = C.$$

2. Розв'язати задачу Коші: $xy' + y = xy^2$; $y(1) = 1$.

Розв'язання. Вихідне рівняння є рівнянням Бернуллі. Стандартна заміна $y = uv$:

$u(xv' + v) + xu'v = xu^2v^2$. Шукаємо частковий розв'язок рівняння $xv' + v = 0$: $v = \frac{1}{x}$.

$u' = xu^2 \left(\frac{1}{x} \right)^2$; $\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$; $-\frac{1}{u} = \ln|x| + C$; $u = -\frac{1}{C + \ln|x|}$. Загальний розв'язок вихідного

рівняння $y = -\frac{1}{Cx + x \ln|x|}$. Врахуємо початкову умову: $1 = -\frac{1}{C}$; $C = -1$.

Відповідь: $y = \frac{1}{x(1-\ln x)}$ (тут враховано, що в околі точки (1;1) замість $\ln|x|$ можна писати $\ln x$).

3. Знайти розв'язок задачі Коші: $y''y^3 + 1 = 0$; $y(1) = -1$; $y'(1) = -1$.

Розв'язання. Вихідне рівняння має вид: $F(y, y', y'') = 0$ і для зниження порядку покладемо $y' = p(y)$. Тоді $y'' = pp'$; $pp'y^3 = -1$; $pdp = -\frac{dy}{y^3}$; $p^2 = y^{-2} + C_1$. Але з урахуванням початкових умов: $C_1 = 0$. Тож: $y' = \frac{1}{y}$ (тут враховано той факт, що $y'(1)$ і $y(1)$ мають однаковий знак). Звідси: $ydy = dx$; $y^2 - 2x = C$, з урахуванням початкових умов: $C = -1$.

Відповідь: $y^2 - 2x + 1 = 0$ (або $y = -\sqrt{2x-1}$).

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' + y' = 2\operatorname{sh} x$.

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння: $y'' + y' = 0$; $\lambda^2 + \lambda = 0$; $y_0 = C_1 + C_2e^{-x}$. Права частина вихідного рівняння дорівнює $e^x - e^{-x}$. Застосуємо принцип суперпозиції. Частковий розв'язок рівняння $y'' + y' = e^x$ шукаємо методом невизначених коефіцієнтів: $y = Ae^x$. Отже, маємо: $2Ae^x = e^x$; $A = \frac{1}{2}$. Частковий розв'язок рівняння $y'' + y' = e^{-x}$ шукаємо у вигляді $y = Bxe^{-x}$ („резонансний випадок”): $y' = B(1-x)e^{-x}$; $y'' = B(x-2)e^{-x}$; $B(x-2+1-x)e^{-x} = e^{-x}$; $B = -1$.

Відповідь: $y_0 = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x - xe^{-x}$.

5. Розв'язати задачу Коші: $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Застосуємо метод варіації. Оскільки відповідне однорідне рівняння має розв'язок $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, то загальний розв'язок вихідного рівняння шукаємо за формулою: $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$. Маємо:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}; \quad C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x; \quad C_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1;$$

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1; \quad C_2(x) = x + C_2.$$

Відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$

6.2. Завдання розрахункової роботи

Завдання 1 Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

$$1. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$$

$$2. \quad xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

$$3. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$4. \quad xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$5. \quad 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$$

$$6. \quad xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$$

$$7. \quad y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$$

$$8. \quad xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$9. \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$$

$$10. \quad xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$11. \quad y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

$$12. \quad xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$13. \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$$

$$14. \quad xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$$

$$15. \quad y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$$

$$16. \quad xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$17. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$$

$$18. xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$$

$$19. y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$20. xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$21. y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

$$22. xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$23. y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

$$24. xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

$$25. 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$$

$$26. xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$$

$$27. y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

$$28. xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$29. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$$

$$30. xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$31. y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Завдання 2 Розв'язати задачу Коші

$$1. y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$$

$$2. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$$

$$3. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0.$$

$$4. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$$

$$5. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$$

$$6. y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$$

$$7. y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$8. y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$9. y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$$

$$10. y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$11. y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$$

$$12. y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

$$13. y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$14. y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$15. y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$$

$$16. y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$$

$$17. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3.$$

$$18. y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$$

$$19. y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

$$20. y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$21. y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$22. y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

$$23. y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$24. y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$25. y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \quad y(0) = 1/2.$$

$$26. y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

$$27. y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$$

$$28. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$29. y' - 3x^2 y = x^2 (1 + x^3) / 3, \quad y(0) = 0.$$

$$30. y' - y \cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$$

$$31. y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1.$$

Завдання 3 Розв'язати задачу Коші

$$1. y' + xy = (1 + x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$2. xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1/2.$$

$$3. 2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$$

$$4. y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$5. xy' - y = -y^2 (\ln x + 2) \ln x, \quad y(1) = 1.$$

$$6. 2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 2.$$

$$7. 3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$$

$$8. 2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$$

$$9. y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3), \quad y(0) = -1.$$

$$10. 3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1.$$

$$11. 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}.$$

$$12. 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1.$$

$$13. 2y' + 3y \cos x = e^{2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, \quad y(0) = 1.$$

$$14. 3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3.$$

$$15. y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = 1/2.$$

$$16. 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = 1/2\sqrt{2}.$$

$$17. y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

$$18. xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$$

$$19. 2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x} y^{-1}, \quad y(0) = 2.$$

$$20. 4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$21. 8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}.$$

$$22. 2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$$

$$23. y' + xy = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$24. 2y' - 3y \cos x = -e^{-2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, \quad y(0) = 1.$$

$$25. y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$26. 2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2.$$

$$27. y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$28. y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, \quad y(1) = 1/\operatorname{sh} 1.$$

$$29. 2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 2.$$

$$30. y' - y \operatorname{tg} x = -(2/3)y^4 \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$31. xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$$

Завдання 4

Варіанти 1—5. Знайти рівняння лінії, що проходить через точку M_0 і таку, що в довільній точці M цієї кривої нормальний вектор \overrightarrow{MN} , де точка N знаходиться на осі OY , має задану довжину a і утворює гострий кут з вектором \vec{j} (вектор \vec{j} задає додатній напрям осі OY).

1. $M_0(15, 1), \quad a = 25.$

2. $M_0(12, 2), \quad a = 20.$

3. $M_0(9, 3), \quad a = 15.$

4. $M_0(6, 4), \quad a = 10.$

5. $M_0(3, 5), \quad a = 5.$

Варіанти 6—10. Знайти рівняння лінії, що проходить через точку M_0 якщо відрізок її нормалі, що міститься між координатними осями, ділиться точкою лінії у відношенні $a:b$ (якщо рахувати від осі OY).

6. $M_0(1, 1), \quad a:b = 1:2.$

7. $M_0(-2, 3), \quad a:b = 1:3.$

8. $M_0(0, 1), \quad a:b = 2:3.$

9. $M_0(1, 0), \quad a:b = 3:2.$

10. $M_0(2, -1), \quad a:b = 3:1.$

Варіанти 11—15. Знайти рівняння лінії, що проходить через точку M_0 якщо відрізок її дотичної між точкою дотику та віссю OY ділиться в точці перетину з віссю абсцис у відношенні $a:b$ (якщо рахувати від осі OY).

11. $M_0(2, -1), \quad a:b = 1:1.$

12. $M_0(1, 2), \quad a:b = 2:1.$

13. $M_0(-1, 1), \quad a:b = 3:1.$

14. $M_0(2, 1), \quad a:b = 1:2.$

15. $M_0(1, -1), \quad a:b = 1:3.$

Варіанти 16—20. Знайти рівняння лінії, що проходить через точку M_0 якщо відрізок її нормалі, що міститься між координатними осями, ділиться точкою дотику у відношенні $a:b$ (якщо рахувати від осі OY).

$$16. M_0(1, 2), \quad a:b=1:1.$$

$$17. M_0(2, 1), \quad a:b=1:2.$$

$$18. M_0(1, 3), \quad a:b=2:1.$$

$$19. M_0(2, -3), \quad a:b=3:1.$$

$$20. M_0(3, -1), \quad a:b=3:2.$$

Варіанти 21—25. Знайти рівняння лінії, що проходить через точку M_0 і таку, що в довільній точці M цієї кривої дотичний вектор \overrightarrow{MN} (точка N знаходиться на осі OX) має проекцію на вісь OX , довжина якої обернено пропорційна абсцисі точки M . Коефіцієнт пропорційності дорівнює a .

$$21. M_0(1, e), \quad a=-1/2.$$

$$22. M_0(2, e), \quad a=-2.$$

$$23. M_0(-1, \sqrt{e}), \quad a=-1.$$

$$24. M_0(2, 1/e), \quad a=2.$$

$$25. M_0(1, 1/e^2), \quad a=1/4.$$

Варіанти 26—31. Знайти рівняння лінії, що проходить через точку M_0 і таку, що в довільній точці M цієї кривої дотичний вектор \overrightarrow{MN} (точка N знаходиться на осі OY) має проекцію на вісь OY , довжина якої дорівнює a .

$$26. M_0(1, 2), \quad a=-1.$$

$$27. M_0(1, 4), \quad a=2.$$

$$28. M_0(1, 5), \quad a=-2.$$

$$29. M_0(1, 3), \quad a=-4.$$

$$30. M_0(1, 6), \quad a=3.$$

$$31. M_0(1, 1), \quad a=1.$$

Завдання 5 Розв'язати задачу Коші

$$1. 4y^3 y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/(2\sqrt{2}).$$

2. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$
3. $y''y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$
4. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
5. $y'' = 32\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 4.$
6. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$
7. $y''y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$
8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}/2, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$
9. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
10. $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$
11. $y''y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$
12. $y'' = 18\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 3.$
13. $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$
14. $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$
15. $y''y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$
16. $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$
17. $y'' = 8\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 2.$
18. $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4.$
19. $y''y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$
20. $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

$$21. y'' = 50 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 5.$$

$$22. y'' = 18y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$$

$$23. y''y^3 + 9 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$$

$$24. y^3 y'' = 4(y^4 - 1), \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

$$25. y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$$

$$26. y'' = 8y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$27. y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$$

$$28. y'' = 2 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 1.$$

$$29. y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

$$30. y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1.$$

$$31. y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$$

Завдання 6 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$1. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$$

$$2. y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x.$$

$$3. y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$$

$$4. y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$$

$$5. y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$$

$$6. y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x.$$

$$7. y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x.$$

8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$
9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x.$
10. $y''' - 3y' - 2y = -4x \cdot e^x.$
11. $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}.$
12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x.$
13. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}.$
14. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x.$
15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x.$
16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x.$
17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x.$
18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}.$
19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}.$
20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4x \cdot e^x.$
21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}.$
22. $y''' - 6y'' + 9y' = 4x \cdot e^x.$
- 13.23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x.$
24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x.$
25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x.$
26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}.$
27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x.$

$$28. y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x.$$

$$29. y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x.$$

$$30. y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}.$$

$$31. y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}.$$

Завдання 7 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$1. y'' - 2y' = 2\operatorname{ch} 2x.$$

$$2. y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x.$$

$$3. y'' - y = 2e^x + \cos x.$$

$$4. y'' - 3y' = 2\operatorname{ch} 3x.$$

$$5. y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}.$$

$$6. y'' - y = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x.$$

$$7. y'' - 4y' = 16\operatorname{ch} 4x.$$

$$8. y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}.$$

$$9. y'' - 4y = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x.$$

$$10. y'' - 5y' = 50\operatorname{ch} 5x.$$

$$11. y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}.$$

$$12. y'' - 9y = -9e^{3x} - 9\cos 3x + 18\sin 3x.$$

$$13. y'' - y' = 2\operatorname{ch} x.$$

$$14. y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}.$$

$$15. y'' - 16y = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x.$$

16. $y'' + 2y' = 2\operatorname{sh} 2x$.
17. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$.
18. $y'' - 25y = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$.
19. $y'' + 3y' = 2\operatorname{sh} 3x$.
20. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$.
21. $y'' - 36y = 36e^{6x} - 72(\sin 6x + \cos 6x)$.
22. $y'' + 4y' = 16\operatorname{sh} 4x$.
23. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$.
24. $y'' - 49y = 14e^{7x} - 49(\sin 7x + \cos 7x)$.
25. $y'' + 5y' = 50\operatorname{sh} 5x$.
26. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$.
27. $y'' - 64y = 128\cos 8x - 64e^{8x}$.
28. $y'' + y' = 2\operatorname{sh} x$.
29. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$.
30. $y'' - 81y = 162e^{9x} + 81\sin 9x$.
31. $y'' - 100y = 20e^{10x} + 100\cos 10x$.

Завдання 8 Розв'язати задачу Коші

1. $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
2. $y'' + 3y' = 9e^{3x} / (1 + e^{3x})$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.

3. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$, $y(\pi/4) = 5$, $y'(\pi/4) = 4$.
4. $y'' - 6y' + 8y = 4/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.
5. $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x}/(1 + e^{-3x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' + \pi^2 y = \pi^2/\sin \pi x$, $y(1/2) = 1$, $y'(1/2) = \pi^2/2$.
7. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
8. $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.
9. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 4$.
10. $y'' - 6y' + 8y = 4/(2 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.
11. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}/(2 + e^{2x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
12. $y'' + 9y = 9/\sin 3x$, $y(\pi/6) = 4$, $y'(\pi/6) = 3\pi/2$.
13. $y'' + 9y = 9/\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
14. $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x})$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.
15. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$, $y(\pi/4) = 3$, $y'(\pi/4) = 2$.
16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 8\ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$.
17. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
18. $y'' + 16y = 16/\sin 4x$, $y(\pi/8) = 3$, $y'(\pi/8) = 2\pi$.
19. $y'' + 16y = 16/\cos 4x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

20. $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.
21. $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}(x/2)$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 1/2$.
22. $y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x})$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 5\ln 3$.
23. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
24. $y'' + 4y = 4/\sin 2x$, $y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = \pi$.
25. $y'' + 4y = 4/\cos 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
26. $y'' + y' = e^x/(2 + e^x)$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 9$.
27. $y'' + y = 2 \operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = 2$.
28. $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x})$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 3\ln 2$.
29. $y'' - 3y' + 2y = e^x/(1 + e^{-x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
30. $y'' + y = 1/\sin x$, $y(\pi/2) = 1$, $y'(\pi/2) = \pi/2$.
31. $y'' + y = 1/\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

6.3 Теоретичні питання для самоконтролю

1. Визначення диференціального рівняння, загальний та частковий розв'язки. Задача Коші.
2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку.
3. Класифікація диференціальних рівнянь першого порядку — з подільними змінними, однорідні, лінійні, Бернуллі — та методи їх розв'язування.
4. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.
5. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку. Фундаментальна система розв'язків.
6. Обчислення фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного

диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.

7. Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами (пошук часткового розв'язку у формі правої частини).

8. Метод варіації побудови розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Рекомендована література.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1,2. М.: Физматгиз, 1963
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1, 2. — К: Либідь, 1993.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1966.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1971.
5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М: Высшая школа, 1994.
6. Ю.В. Богданський. «Інтеграл в курсі математичного аналізу» (електронний посібник) – рекомендовано Методичною радою НТУУ КПІ, протокол №9 від 16.05.2013р. – 180с.
7. Застосування визначеного інтеграла: методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи для студентів Інституту системного аналізу денної форми навчання / Укладачі: Г.Б. Подколзін, Ю.А. Чаповський. К.:НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського, 2017.
8. Методичні вказівки до практичних занять по математичному аналізу. «Невласні інтеграли». Укладач: Мальцев.А.Ю. Київ „Політехніка” 2008, 24с
9. Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з дисципліни «Математичний аналіз». НТУУ КПІ, 2015 р., 15 с.